生成式对抗网络（GAN）学习笔记

作者：KevinZonda

GAN 是一个的网络，其将一个无监督学习问题巧妙转换成了监督学习问题。其核心包含了两组神经网络：生成器（G）和辨别器（D）。

生成器的目的是通过输入 z，生成假数据 $G(z)$。

辨别器的目的是根据输入，输出输入是真实的置信度。也就是判定是真实数据还是假数据：如果是真实数据，输出 1；如果是假数据，输出 0。

因此我们的目标可以简化为，我们希望构建一个足够好的辨别器，并让生成器成功欺骗辨别器。

建模

生成器 G

对于生成器 G，其输入是一个随机噪声 $z \sim p_z(z)$，输出是一个假数据 $G(z)$。

其目标是使得辨别器 D 无法判定 $G(z)$ 是假数据。因此则为：

$$\max D(G(z))$$

辨别器 D

对于辨别器 D，其输入是一个数据，输出 $D(x)$ 是一个概率，表示 x 是真实数据的概率。

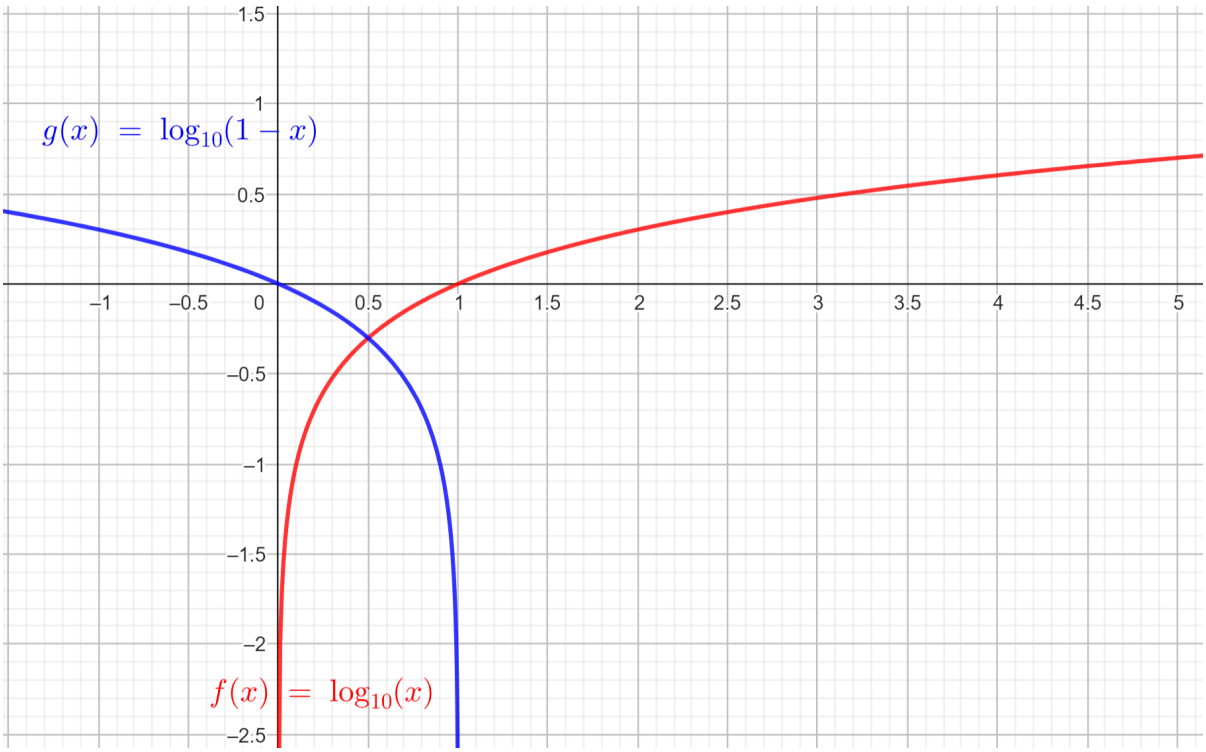
因此对于真实数据： $x \sim p_{data}(x)$，我们期望

$$\max D(x)$$

因此对于虚假数据（生成的数据）： $z \sim p_z(z)$，我们期望

$$\min D(G(z))$$

目标函数



为此可以构建目标函数：

$$\min_G \max_D V(D,G) = \mathbb{E}_{x\sim p_{data}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z\sim p_{data}(z)}[\log(1-D(G(z)))]$$

对于辨别器 D：

- 期望 $D(x)$ 大
- 期望 $D(G(z))$ 小
  - $\rightarrow 1-D(G(z))$ 大
  - $\rightarrow \log\left(1-D(G(z))\right)$ 大
- 因此期望 $V(D,G)$ 大

对于生成器 G：

- 期望 $D(G(z))$ 大
  - $\rightarrow 1-D(G(z))$ 小
  - $\rightarrow \log\left(1-D(G(z))\right)$ 小
- 因此期望 $V(D,G)$ 小

> 我们可以理解数学期望 $\mathbb{E}$ 为：
>
> ```
> func E(xs []float64, oper func(float64) float64) float64 {
>     sum := 0.0
>     count := 0
>     for _, x := range xs {
>         sum += oper(x)
>         count++
>     }
>     sum /= count
>     return sum
> }
> ```

算法 1

- 对于 **每一个迭代** 循环：
  - 循环 k 次（需要自定义）
    - 从噪音分布 $p_g(z)$ 中采样 m 个噪音样本 $\{z^{(1)},\dots,z^{(m)}\}$
    - 从真实数据分布 $p_{data}(x)$ 中采样 m 个真实样本 $\{x^{(1)},\dots,x^{(m)}\}$
    - 更新辨别器 D 的参数：
      - $\theta_D \leftarrow \theta_D - \alpha\nabla_{\theta_D}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[\log D(x^{(i)}) + \log(1-D(G(z^{(i)})))\right]$
    - 结束循环
  - 从噪音分布 $p_g(z)$ 中采样 m 个噪音样本 $\{z^{(1)},\dots,z^{(m)}\}$
  - 更新生成器 G 的参数：
    - $\theta_G \leftarrow \theta_g - \alpha\nabla_{\theta_G}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(1-D(G(z^{(i)})))$
- 结束循环

需要注意，在最开始时候 D 可能训练的特别好，但是 G 很难训练的很好，那么 G 就会面对梯度消失的问题。

可能的解决方案，使用最大化 $\log D(G(z))$，而不是最小化 $\log(1-D(G(z)))$ 以训练 G。

理论证明

命题 1：最佳的 D

Proposition 1：对于固定的 G，最佳的 D 是

$$D_G^*(x) = \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_g(x)} \in [0, 1]$$

对于两个分布 p_{data} 和 p_g，为了判别其是否相等，原式=.5（Two Sample Test）。

证明：

考虑：

$$\mathbb{E}_{x \sim p} f(x) = \int_x p(x) f(x) dx$$

可得：

$$\begin{aligned} V(D, G) &= \mathbb{E}_{x \sim p_{data}(x)}[\log D(x)] + \mathbb{E}_{z \sim p_{data}(z)}[\log(1 - D(G(z)))] \\ &= \int_x p_{data}(x) \log D(x) dx + \int_z p_z(z) \log(1 - D(G(z))) dz \\ &\text{考虑 } G(z) = p_g(x) \\ &= \int_x p_{data}(x) \log D(x) dx + \int_x p_g(x) \log(1 - D(x)) dx \\ &= \int_x p_{data}(x) \log D(x) + p_g(x) \log(1 - D(x)) dx \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} a &= p_{data}(x) \\ y &= D(x) \\ b &= p_g(x) \end{aligned}$$

因此可使原式改写为

$$\begin{aligned} V(D, G) &= \int_x p_{data}(x) \log D(x) + p_g(x) \log(1 - D(x)) dx \\ &= \int_x a \log(y) + b \log(1 - y) dx \end{aligned}$$

考虑到这是一个关于辨别器的函数，也就是对于 D的函数，因此我们认为这个函数是 $y \to a \log(y) + b \log(1 - y)$

这个函数是个凸函数，因此为求其最大值，我们可以求其导数为0的点。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} a \log(y) + b \log(1 - y) = \frac{a}{y} - \frac{b}{1 - y} &= 0 \\ \frac{a}{y} &= \frac{b}{1 - y} \\ a - ay &= by \\ y &= \frac{a}{a + b} \\ D(x) &= \frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x) + p_g(x)} \end{aligned}$$

代入回原式，可得：

$$
\begin{aligned}
C(G) &= \max_D V(D,G) \\
&= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}(x)}[\log(D_G^*(x))] + \mathbb{E}_{z\sim p_z(z)}[\log(1-D_G^*(G(z)))] \\
&= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}[\log(D_G^*(x))] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}[\log(1-D_G^*(x))] \\
&= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log\frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\frac{p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right]
\end{aligned}
$$

因为我们已经完成了最大化 D，因此只需要最小化 $C(G)$ 了。

> KL 散度
>
> $$
> \begin{aligned}
> D_{KL}(P||Q) &= \mathbb{E}_{x\sim p(x)}\log\frac{P(x)}{Q(x)} \\
> &= \sum_i P(i)\log\frac{P(i)}{Q(i)}
> \end{aligned}
> $$
>
> 有两个分布 P 和 Q，我们希望知道 P 和 Q 之间的差异。

$$
C(G) = \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log\frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\frac{p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right]
$$

定理 1：$C(G)$ 的最小值

定理 1：当且仅当 $p_g = p_{data}$ 时，$C(G)$ 达到全局最小解。并且此时 $C(G) = -\log 4$

证明：

考虑当 D 达到 optimal 时候，$D(x) = \frac{1}{2}$。因此

$$
C(G) = \log\frac{1}{2} + \log\frac{1}{2} = -\log 4
$$

因此可以重写原式：

$$
\begin{aligned}
C(G) &= \mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log\frac{p_{data}(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\frac{p_g(x)}{p_{data}(x)+p_g(x)}\right] \\
&= \left(\mathbb{E}_{x\sim p_{data}}\left[\log\frac{p_{data}(x)}{\frac{1}{2}(p_{data}(x)+p_g(x))}\right] - \log 2\right) + \left(\mathbb{E}_{x\sim p_g}\left[\log\frac{p_g(x)}{\frac{1}{2}(p_{data}(x)+p_g(x))}\right] - \log 2\right) \\
&= -\log 4 + D_{KL}\left(p_{data}||\frac{p_{data}+p_g}{2}\right) + D_{KL}\left(p_g||\frac{p_{data}+p_g}{2}\right)
\end{aligned}
$$

考虑 KL 散度的性质：KL散度 ≥ 0，当其为 0 时，必然是两分布相同，因此为让 $C(G)$ 最小，我们需要让 KL 散度最小，也就是 $p_{data} = p_g$。

算法 1 的收敛性

命题 2

proposition 2：如果 G 和 D 有足够的容量（capacity），并且对于 算法 1的每一步，辨别器 D 和 p_g 在给定 G 被训练到最优，使用如下标准：

$$
\mathbb{E}_{x\sim p_{data}}[\log D_G^*(x)] + \mathbb{E}_{x\sim p_g}[\log(1-D_G^*(x))]
$$

那么 p_g 收敛到 p_{data}。